Einführung

Die deutschen Bildungsstandards setzen andere Schwerpunkte im Mathematikunterricht als bisher. Als zentrale allgemeine mathematische Kompetenzen werden *mathematisch argumentieren*, *Probleme mathematisch lösen*, *mathematisch modellieren*, *mathematische Darstellungen verwenden*, *mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* und *kommunizieren* genannt. Es geht hier gleichsam um ein neues Verständnis von Mathematikunterricht. Die Umsetzung dieser Aspekte ist jedoch nicht leicht und stellt hohe Anforderungen an die Lehrkräfte, insbesondere unter den zum Teil schwierigen Rahmenbedingungen in der Hauptschule sowie insgesamt bei leistungsschwächeren Schülern.

Daher wurden im Rahmen von Stratum in Zusammenarbeit zwischen Hochschule, Schule und Regierungspräsidium Unterrichtseinheiten speziell für leistungsschwache Schüler bzw. Hauptschüler entwickelt, die diesen neuen Bildungsstandards Rechnung tragen. Diese Unterrichtseinheiten beziehen sich auf die allgemeine mathematische Kompetenz *Modellieren*.

Dabei drängen sich natürlich viele Fragen auf, auf die hier kurz eingegangen werden soll:

- *Was ist Modellieren überhaupt?*

  Laut Bildungsstandards gehört dazu Bereiche oder Situationen, die modelliert werden sollen, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen zu übersetzen, in dem jeweiligen mathematischen Modell zu arbeiten und Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation zu interpretieren und zu prüfen (Kultusministerkonferenz, 2004, 2005).

- *Ist das Modellieren wirklich so wichtig, dass es eine gesonderte Betrachtung in einem Projekt verdient? Schließlich umfassen die Bildungsstandards auch noch viele andere Inhalte, die behandelt werden müssen.*

  Der Mathematikunterricht soll zur Bildung der Schülerinnen und Schüler beitragen, indem er ihnen drei zentrale Grunderfahrungen ermöglicht: Die erste Grunderfahrung ist, dass die Schüler technische, natürliche, soziale und kulturelle Erscheinungen mit Hilfe der Mathematik wahrnehmen, verstehen und unter Nutzung mathematischer Gesichtspunkte beurteilen. Modellieren ist der Schlüssel zur Ermöglichung dieser Grunderfahrung. Soweit die Bildungsstandards. *Aber rechtfertigt dies angesichts knapper Zeitressourcen wirklich eine besondere Betrachtung?* Modellierungsaufgaben beziehen sich immer auf bestimmte mathematische Inhalte, das heißt, beim Behandeln von Modellierungsaufgaben übt man mit den Schülern[1] immer auch gleichzeitig mathematisches Wissen flexibel einzusetzen, das zu den fünf Leitideen gehört. Auch die oben erwähnten Aspekte wie Problemlösen, Argumentieren, kommunizieren usw. sind dem Modellieren immanent.

- *Ist Modellieren eigentlich wirklich etwas Neues oder geht es nicht nur um das bekannte Sachrechnen und um Textaufgaben, die ohnehin im Unterricht behandelt werden?*

  Schauen wir uns dazu die üblichen Textaufgaben genauer an: In ein oder zwei Sätzen wird kurz ein Sachthema beschrieben. Alle Zahlenangaben, die zur Berechnung benötigt werden, sind angegeben und müssen in der Regel mit der Rechenart, die zuvor eingeführt wurde, verknüpft werden. Das Sachthema wird meist sehr vereinfacht dargestellt und ist eher unwichtig. Das Einbinden von Alltagserfahrungen ist oft nicht nötig. Hauptsache, am Ende kommt das richtige Ergebnis raus. Was lernen die Schüler dabei? Sie erwerben vielleicht ein gewisses Operationsverständnis. Darüber hinaus lernen sie aber zum Teil auch, dass es reicht, Zahlen aus einem Text zu entnehmen und mit einer Rechenart zu verknüpfen. Mathematik im Leben anzuwenden und diese Anwendung auch wahrzunehmen lernen sie dadurch nicht. Denn Anwendungen in der Realität sind anders. Und genau da setzt das Modellieren an.

Wie wichtig es ist, den Schülern realistische Anwendungen zu zeigen, verdeutlichen die beiden folgenden Schüleraussagen exemplarisch:

I: Und Mathe kannst du auch in deinem Alltag, in deiner Freizeit gebrauchen? Außer beim Einkaufen?

S: Mm. Eigentlich nicht oder ja manchmal, weiß nicht, äh.

---

[1] Wegen der besseren Lesbarkeit wird das generische Maskulinum verwendet. Prinzipiell sind damit immer beide Geschlechter gemeint.

Das Projekt wurde vom Forschungsverbund Hauptschule gefördert.

I: Nur beim Einkaufen, meinst?
S: Ja. Aber da auch nicht, irgendwie. [lacht kurz auf]
(Hauptschüler, Klasse 5)

Diesem Schüler fällt zum Anwenden von Mathematik nur das Einkaufen ein, aber letzten Endes muss er auch hier passen, was leicht nachvollziehbar ist, wenn man an digitale Waagen und Kassen denkt. Das zweite Beispiel illustriert die Situation ausgehend von einer mathematischen Rechnung:

I: Also, kannst du dir vorstellen, wo man so was rechnen muss 123 mal 7.
S: Nee, kann ich nicht.
I: Weil es sind ja einfach zwei Zahlen: 123 und 7. Hast du ne Idee, ein Beispiel, wo man vielleicht das brauchen könnte, dass man 123 mal 7 rechnet?
S: Hmmh. [verneinend]
(Hauptschüler, Klasse 5)

Dieser Schüler kann sich überhaupt nicht vorstellen, wo er die einfache Multiplikation 123 · 7 im Leben benötigen könnte. Der Transfer vom im Unterricht Gelernten zu seiner Anwendung im Alltag, sowie die Befähigung als mündiger Bürger die Mathematik im Alltag kritisch zu reflektieren erfolgt also nicht automatisch. Ein Verändern dieser Situation erscheint also angezeigt. Es muss gezielt geübt werden, und zwar ausgehend von Sachsituationen so wie sie sich im Leben präsentieren. Hier setzen Modellierungsaufgaben an.

Mit den Modellierungsaufgaben ist also ein anderes Selbstverständnis von Unterricht verbunden: Die Schüler lernen selbstständig mit realistischen Problemen im Alltag umzugehen. Das bedeutet wiederum, dass dem Sachkontext und der Anleitung zum selbstständigen Arbeiten ein höherer Stellenwert zukommt als bei anderen Aufgaben.

Was genau versteht man nun unter Modellieren?

Was ist Modellieren?

Mathematisches Modellieren dient – wie bereits gesagt - der Lösung von komplexen, realen Fragestellungen mit Hilfe der Mathematik. Es findet also dann statt, wenn man mit Mathematik über die reale Welt nachdenkt.

Grundlegender Gedanke des Anwendens von Mathematik auf die Realität ist die Entwicklung eines Modells, das mathematisch erfasst werden kann. Dabei ist ein Modell eine vereinfachende Darstellung der Realität, die nur für das jeweilige Problem relevante Teilaspekte berücksichtigt.

Die „Reiseroute“ zwischen Mathematik und Welt ist keine Einbahnstraße. Sie hält für jede Richtung viele verschiedene Wege bereit: Zu einer Situation oder einem Phänomen kann es verschiedene mathematische Modelle geben, ein Modell kann in seiner Allgemeinheit viele Phänomene beschreiben und so Analogien offen legen. Diese Überlegungen zeigen auch: Mathematische Modelle sind nicht schon genau so in der realistischen Situation zu finden. Sie sind immer nur begrenzte Sichtweisen, die wir konstruieren und in die Natur hineinsehen.

Wie gelangt man nun von einem Problem in der Realität zu einem Modell und von dem Modell zu einer Lösung des Problems? Der komplexe Vorgang des Modellierens kann als Kreislauf beschrieben werden (Abb. 1).

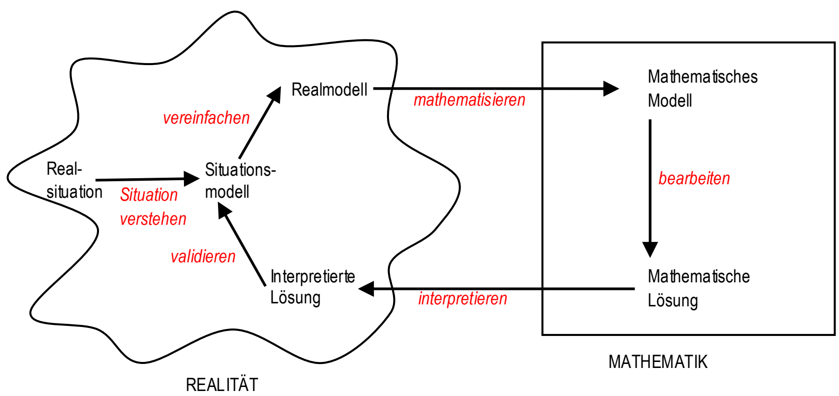

Abb. 1: Modellierungskreislauf nach Blum & Leiß (2005)

Das Projekt wurde vom Forschungsverbund Hauptschule gefördert.

Die Kreislaufdarstellung des Modellierens (Abb. 1) ist ein vereinfachendes Schema. In den seltensten Fällen wird dieses Schema wie ein Algorithmus durchlaufen. In der Regel wird man zum Beispiel schon bei der Bildung des mathematischen Modells überlegen, inwieweit man überhaupt über die nötigen mathematischen Kompetenzen zur Bearbeitung des Modells verfügt. Oder man bemerkt bereits beim Berechnen, dass das Modell nicht geeignet ist und sucht nach neuen Möglichkeiten. Insgesamt ist Modellieren ein komplexer Prozess, bei dem immer wieder zwischen verschiedenen Schritten gewechselt wird.

Dieser Prozess soll im Folgenden anhand eines einfachen Beispiels beschrieben werden (vgl. Maaß, 2009).

Modellierungsprozess	***Beispiel***
Ausgangspunkt des Modellierens ist in der Regel eine komplexe problemhaltige Situation, für die man eine Lösung sucht.	*Annika möchte mit ihren Eltern in die Sommerferien fahren. Doch leider geht es nicht vorwärts. Stau! Seit Stunden stecken sie fest, im Radio hört Annika, dass der Stau 20 km lang ist.* *Annika ist durstig, doch endlich kommt jemand vom Roten Kreuz und bringt Wasser. Wie viele Menschen müssen in so einem Stau eigentlich versorgt werden?*
Die vorgegebene Situation in der Realität muss zunächst vereinfacht, idealisiert und strukturiert werden. Dadurch entsteht ein Modell der Realität, das sogenannte **Realmodell.** Das Mathematisieren des Realmodells, also die Übersetzung der Modellbeschreibung aus der Sprache des Alltags in die Sprache der Mathematik führt zum **mathematischen Modell.** In vielen, insbesondere einfachen Modellierungs-beispielen ist jedoch eine Unterscheidung von Realmodell und mathematischem Modell nur schwer vorzunehmen, da die Verwendung von Zahlen oder von geometrischen Formen z. B. direkt zum mathematischen Modell führt. Daher wird der Übergang von der Realität zum mathematischen Modell als ein komplexer Schritt aufgefasst.	*Es werden folgende vereinfachende Annahmen getroffen:* *Zuerst sollte man sich überlegen, nach was gefragt ist. Dem Text kann man dann entnehmen, dass nach der Anzahl der Leute gefragt ist, die sich in diesen 20 km Stau befinden.* *Um dies berechnen zu können, braucht man einige Annahmen/ Überlegungen, die man selbst treffen muss:* *- Der Stau ist 20 km lang.* *- Was für eine Straße ist es (2-oder 3-spurige Autobahn, Landstraße…)?* *- Ein Auto ist ca. 3 m lang.* *- Es sind Ferien und somit sitzen meist mehrere Leute in einem Auto (2 - 4 Personen).*
In dem mathematischen Modell kann nun mit vorläufigen Annahmen und mathematischen Algorithmen gearbeitet werden. Man erhält – im Idealfall – eine **mathematische Lösung**.	*Einfache Rechnung* *20 km: 3 m = x* *2-spurig: x * 2 =* *3-spurig: x * 3 =* *Ergebnis * Anzahl der Personen in den Autos*
Dieses Ergebnis muss im Hinblick auf die Realsituation und Fragestellung interpretiert werden. Man erhält die **interpretierte Lösung**.	*An dieser Stelle muss überlegt werden, ob das Ergebnis „richtig“ ist. Hier kann dann darauf eingegangen werden, ob die Fahrbahn 2- oder 3-spurig ist oder ob manche Auto länger als 3 m sind, etc..*
Das Modellieren ist mit der Interpretation noch nicht beendet. Vielmehr muss über die gesamte Modellierung kritisch reflektiert werden, das Ergebnis sollte durch das Vergleichen mit geeigneten Werten **validiert** werden. Erweist sich im Rahmen der Validierung (oder vorher)	*Das Ergebnis ist nur als Richtwert anzusehen, da es auf stark vereinfachten Annahmen beruht.* *Die Größenordnung von … erscheint jedoch plausibel.* *Eine erneute Modellierung erscheint nicht erforderlich, da man lediglich an der Größenordnung interessiert ist.*

die gefundene Lösung oder das gewählte Vorgehen als der Realität nicht angemessen, so müssen einzelne Schritte oder auch der gesamte Modellierungsprozess erneut durchgeführt werden, sei es mit veränderten vereinfachenden Annahmen oder mit anderen mathematischen Strategien. Die Entscheidung, welches Vorgehen als geeignet angesehen wird, liegt beim Modellierer, das Modellieren enthält somit eine wesentliche subjektive Komponente.	

Warum Modellieren?

Mathematisches Modellieren ist wesentlicher Bestandteil der Bildungsstandards - soweit so gut! *Doch macht es wirklich Sinn, Modellieren in den Mathematikunterricht zu integrieren? Was lernen die Schüler eigentlich wirklich dabei?*

Ganz allgemein formuliert lernen die Schüler natürlich, Mathematik in ihrer Umwelt wahrzunehmen und auf realistische Probleme anzuwenden. Genauer kann man folgende Zielsetzungen unterscheiden: Modellierungen und Realitätsbezüge sollen den Schülern

1. **Kompetenzen zum Anwenden von Mathematik** in einfachen und komplexen sowie in bekannten und unbekannten Situationen vermitteln und ihnen helfen, Umweltsituationen zu verstehen und zu bewältigen. Dazu gehört auch, dass die Schüler als mündige Bürger mathematische Erkenntnisse in der Werbung, in den Medien und in der Umwelt kritisch hinterfragen können.
2. **ein ausgewogenes Bild von Mathematik als Wissenschaft** und ihrer Bedeutung für unsere Kultur und Gesellschaft vermitteln. Dazu gehört auch, dass die Schüler nicht nur Einblick in den Nutzen von Mathematik in ihrer unmittelbaren Umwelt bekommen, sondern auch erfahren, wie Mathematik in anderen Lebens- und Berufsfeldern nützlich sein kann.
3. **heuristische Strategien**, also das Arbeiten mit vorläufigen Annahmen, sowie Problemlöse-, Argumentationsfähigkeiten und kreatives Verhalten vermitteln.
4. **Motivation** zur Beschäftigung mit Mathematik vermitteln und das Behalten und Verstehen von mathematischen Inhalten unterstützen.

Die Ziele sind sehr vielfältig. Das Anwenden von Mathematik hat also nicht nur eine Vermittlerposition, es ist selbst Lerninhalt und ist nicht nur da, um die Schüler zu motivieren.

Modellierungskompetenzen

Das Lösen von Modellierungsaufgaben und somit das Durchlaufen des Modellierungsprozesses sind jedoch nicht trivial. Die dazu nötigen Kompetenzen bezeichnet man als *Modellierungskompetenzen*. Modellierungskompetenzen umfassen die folgenden Teilkompetenzen:

- Kompetenzen zum Verständnis eines realen Problems
- Kompetenzen zum Vereinfachen einer Situation und zum Strukturieren einer Situation (d. h. zum Aufstellen eines Realmodells)
- Kompetenzen zum Übersetzen der Situation in die Sprache der Mathematik (d. h. zum Aufstellen eines mathematischen Modells)
- Kompetenzen zur Lösung mathematischer Fragestellungen innerhalb eines mathematischen Modells
- Kompetenzen, die Bedeutung eines mathematischen Ergebnisses für die Realität zu erkennen (d. h. zur Interpretation mathematischer Resultate)
- Kompetenzen, kritisch über eine Lösung nachzudenken (d. h. sie zu validieren)

Das Projekt wurde vom Forschungsverbund Hauptschule gefördert.

Für ein angemessenes, zielgerichtetes Modellieren sind zudem noch einige weitere, den ganzen Modellierungsprozess betreffende Kompetenzen erforderlich:

- Auf den Modellierungsprozess bezogen argumentieren können und diese Argumentation verschriftlichen.
- Auf einer Metaebene über Modellierungsprozesse nachdenken und Metawissen über Modellierungsprozesse einsetzen (vgl. Abschnitt *Metakognition*).
- Möglichkeiten, die die Mathematik zur Lösung von realen Problemen bietet, erkennen und sie positiv beurteilen.

Der letzte Punkt bezieht sich auf die Einstellung der Schüler zu realitätsbezogener Mathematik und deren Einfluss auf die Modellierungskompetenzen. Wenn die Schüler nicht wissen, dass Mathematik beim Lösen realer Probleme helfen kann, so können sie sie auch nicht nutzen.

Erneut ein kritischer Blick auf diese Auflistung: Können Hauptschüler dies wirklich lernen? Natürlich ist klar, dass Sechstklässler keine seitenlangen schriftlichen Argumentationen verfassen können und beim Reflektieren über das Vorgehen auf einer Metaebene, Begriffe wie beispielsweise „Validieren“ nicht verwendet werden.

Wichtig für die Hauptschule erscheint vielmehr, die Schüler langsam an solche Aufgaben heranzuführen und die Bedingungen zu schaffen, die Schüler benötigen, um zu lernen selbstständig und selbstgesteuert zu arbeiten und ihr Vorgehen auch zu begründen.

Aufgaben für den Einstieg

Ausgangspunkt für die folgenden Überlegungen ist das Vorgehen vieler Schüler beim Bearbeiten von Textaufgaben. Unter dem Begriff Textaufgaben werden in der Regel sehr einfache, häufig künstliche Sachaufgaben verstanden, die Schülern den Eindruck vermitteln, dass jede Mathematikaufgabe lösbar ist und es eine eindeutige, korrekte und genaue Antwort in Form einer Zahl gibt. Die Schüler wissen in der Regel, dass man die Lösung erhält, indem man die Zahlen im Text mit einer oder mehrerer bekannter mathematischer Operationen verknüpft. Das kann dazu führen, dass Schüler ihre Alltagserfahrungen beim Bearbeiten von Mathematikaufgaben völlig ausblenden und auch bei sinnlosen Aufgaben zu Ergebnissen kommen.

Um die Schüler von diesem Vorgehen abzubringen, muss man ihnen also Aufgaben geben, bei denen ein derartiges Vorgehen nicht möglich ist. Daher eignen sich zum Einstieg in das Modellieren einerseits Aufgaben, die die Erwartungen der Schüler durchbrechen. Andererseits sind für die Entwicklung von Modellierungskompetenzen und somit insbesondere für den unterrichtlichen Einstieg Aufgaben sinnvoll, die sich auf einzelne Teilschritte beziehen bzw. das Durchlaufen des gesamten Modellierungsprozess auf einfachem Niveau erfordern.

Im Folgenden wird zunächst erläutert, inwieweit zu den einzelnen Teilschritten im Modellieren Aufgaben formuliert werden können, anschließend wird eine Übersicht über verschiedene Aufgabentypen gegeben.

Möchte man Aufgaben zur Entwicklung eines Situationsmodells oder eines Realmodells entwickeln, so bedeutet dies, eine Modellierungsaufgabe zu entwickeln und lediglich ein Situations- oder Realmodell einzufordern. D. h. man bricht die Bearbeitung der Aufgabe ohne Lösung ab. Dies ist für den Einsatz im Unterricht unbefriedigend. Die Förderung der Schülerkompetenzen im Aufstellen der Modelle sollte eher durch methodische Unterstützung erfolgen. Aufgaben, die auf das Erstellen des mathematischen Modells fokussieren, müssen ein Realmodell vorgeben und entsprechen damit herkömmlichen Textgaben, die im Unterricht ohnehin behandelt werden. Sie werden daher hier nicht näher betrachtet. Schließlich sind Aufgaben, die auf das Finden einer mathematischen Lösung, basierend auf einem vorgegebenen mathematischen Modell, ausgerichtet sind, innermathematische Aufgaben. Daher soll hier auch auf diese verzichtet werden. Das Interpretieren und das Validieren sind jedoch Teilschritte, die für das Modellieren sehr wichtig sind, im Unterricht bislang wenig Verwendung finden und auch gut in Aufgaben getrennt behandelt werden können.

Die Berücksichtigung beider Aspekte – Durchbrechen der Erwartungen und Fokus auf bestimmte Modellierungsteilschritte – führt zu folgenden Arten von Aufgaben:

- *Aufgaben mit inkonsistenten Daten:* In der Aufgabe sind Daten gegeben, die nicht zum Lösen der Fragestellung geeignet sind. Sie dienen nicht nur als Scherzaufgaben, sondern sollen die Schüler darauf aufmerksam machen, dass der Sachkontext beachtet werden muss.

- *Überbestimmte Aufgaben* (mehr Angaben als nötig): Da erst die relevanten Größen identifiziert werden müssen, wird die Aufmerksamkeit auf den Kontext gelenkt. Die Schüler müssen relevante Daten von irrelevanten Daten unterscheiden, eine Situation auf die man in der Realität häufig trifft. Dabei muss nicht unbedingt ein ganzer Modellierungsprozess durchlaufen werden. Die Tatsache, dass die relevanten Größen zwar erkannt, aber nicht noch zusätzlich geschätzt werden müssen, erleichtert den Schülern – verglichen mit Modellierungsaufgaben – vielfach die Bearbeitung.

- *Unterbestimmte Aufgaben* (weniger Angaben als nötig): Die Erwartungen der Schüler werden durchbrochen, da die Schüler Angaben erst schätzen oder sich zusätzliche Informationen besorgen müssen. Es kann verschiedene Lösungswege und verschiedene Lösungen geben. Die Schüler lernen, einen gesamten Modellierungsprozess auf einfachem Niveau zu durchlaufen.

- *Validierungsaufgaben*: In diesen Aufgaben wird bereits ein weniger geeignetes Modell oder eine nicht passende Lösung vorgegeben. Im Sinne des Modellierungsprozesses ist hier eine Validierung nötig.

- *Interpretationsaufgaben*: Diese Aufgaben erfordern das Interpretieren von Daten, einem weiteren wichtigen und für die Schüler ungewohnten Schritt, der im Sinne des Modellierungsprozesses wesentlich ist. Entsprechende Situationen begegnen ihnen beim Lesen von Karten, Fahrplänen, Tarifen u. Ä..

All diese Aufgaben finden in den entwickelten Unterrichtseinheiten Berücksichtigung. Modellierungskompetenzen im Durchführen von Teilschritten, die nicht durch eine besondere Art von Aufgaben gefördert werden können, werden im Rahmen der Unterrichtseinheiten methodisch gefördert (siehe unten).

Modellierungsaufgaben und realitätsbezogene Aufgaben gibt es zu vielen verschiedenen Sachsituationen. Doch welche Sachkontexte sind für die Schüler geeignet? Natürlich an erster Stelle Sachkontexte aus der Erfahrungswelt der Schüler bzw. solche, die für die Schüler relevant sind. Aber nicht ausschließlich. Betrachten wir erneut die Stauaufgabe. Natürlich ist es für einen Schüler nicht lebensnotwendig, zu wissen, wie viel Menschen in einem Stau stehen und natürlich muss er das in seinem Alltag nicht ausrechnen. Aber die oben genannten Ziele zeigen, dass es auch um mehr geht. Die Schüler sollen lernen, Mathematik anzuwenden, und das eventuell auch in Situationen, die ihnen später als Erwachsene begegnen können. Sie sollen einen Einblick in den Nutzen von Mathematik für unsere Kultur und die Gesellschaft bekommen und dazu gehören auch Beispiele, die über den direkten Nutzen im Alltag der Schüler hinausgehen. Der Mathematikunterricht trägt hier nicht nur zur Lebensvorbereitung sondern auch zur Weltorientierung bei (Heymann 1996). Doch das gilt vorrangig für Schüler, die schon an das Modellieren gewöhnt sind.

Für Schüler im 6. Schuljahr, die wenig Erfahrung im Modellieren haben, sollten zum Einstieg allerdings Sachkontexte ausgewählt werden, die schülernah sind und die Schüler interessieren. Doch was interessiert die Schüler? Das ist natürlich von Schüler zu Schüler verschieden und deshalb liegt die Antwort darin, möglichst viele verschiedene Sachkontexte auszuwählen. Vorstudien haben gezeigt, dass die Schüler einerseits Interesse an Dingen aus ihrem Alltag haben, aber auch Interesse an fernen Welten, z. B. die der Römer. Auf positive Reaktionen stießen auch Aufgaben, in denen die Schüler persönlich angesprochen wurden (z. B. Wie viel Farbe benötigst du, um dein Zimmer zu streichen?). Die Sachkontexte der Aufgaben für diese Studie wurden entsprechend ausgewählt.

Modellieren im Unterricht

Der Einsatz von Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht soll dazu führen, dass die Schüler lernen, selbstständig Mathematik auf komplexe Probleme anzuwenden. Daher müssen auch die Unterrichtsmethoden darauf ausgelegt sein, die Selbstständigkeit der Schüler und das eigenständige Denken zu fördern. Dazu gibt es natürlich eine Vielzahl von Möglichkeiten (Maaß, 2007). Hier soll im Folgenden kurz auf mögliche Methoden und anschließend auf wichtige Prinzipien bei der Umsetzung eingegangen werden.

Das Projekt wurde vom Forschungsverbund Hauptschule gefördert.

Vorbereitung

Einer der ersten Schritte bei der Unterrichtsplanung von Modellierungsaufgaben ist es, dass der Lehrer die Aufgabe selbst bearbeitet. Da der Modellierungsprozess viele kleine Schritte beinhaltet, kann selbst ein Erwachsener das Ergebnis nicht aus dem Stegreif benennen oder etwaige Bearbeitungsschwierigkeiten voraussehen, wenn er die Aufgabe nicht selbst bearbeitet hat. Um für die möglicherweise ganz anderen Lösungen der Schüler offen zu sein, ist es außerdem wichtig, sich Gedanken über verschiedene Zugänge zu den Aufgaben zu machen.

Darüber hinaus ist es sehr wichtig, sich Gedanken darüber zu machen, welche Fehler auftreten könnten und an welcher Stelle die Schüler Schwierigkeiten haben könnten (siehe Abschnitt *Fördern und Bewerten* sowie *Mögliche Probleme der Schüler* in den einzelnen Unterrichtseinheiten).

Betrachten wir nun den Stundenverlauf unter methodischen Gesichtspunkten.

Phasierung

Grundsätzlich lässt sich jede Stunde in den Einstieg, die Erarbeitung und die Auswertung gliedern. Diese Gliederung findet sich auch in den Unterrichtsmodulen wieder. Es gibt eine Vielzahl von Methoden, um die entsprechenden Stundenteile zu gestalten. Entscheidendes Kriterium für die Auswahl der Methoden war hier, die Stunden methodisch abwechslungsreich zu gestalten und die Methodenkompetenz der Schüler zu schulen. Welche Methoden im Einzelfall verwendet werden, ist den einzelnen Modulen zu entnehmen.

Grundsätzlich dient der ***Einstieg*** dazu, die Schüler an die Aufgabe heranzuführen. Dabei ist bei Modellierungsaufgaben, anders als bei anderen Mathematikaufgaben, darauf zu achten, dass der Sachkontext einen angemessenen Stellenwert bekommt. Die Schüler benötigen Zeit, sich in das Thema einzudenken. Entsprechende Fragestellungen und Impulse in den Modulen sollen dies gewährleisten. Erst anschließend wendet man sich der eigentlichen Fragestellung zu. Ein darauf folgendes Brainstorming kann den Schülern helfen, erste Lösungsideen zu entwickeln. Diese Einstiegsphase kann im Plenum stattfinden, denkbar ist es aber auch, den Schülern kurz Zeit zu geben, individuell Lösungsideen zu entwickeln.

In der folgenden ***Erarbeitungsphase*** sollen die Schüler selbstständig Lösungen entwickeln. Dies geschieht am besten in Gruppen- oder Partnerarbeit. Aber auch Einzelarbeit ist denkbar. Wichtig ist dabei, dass die Schüler wirklich angeleitet werden, selbstständig zu arbeiten, also möglichst wenig direkte Hilfen vom Lehrer erhalten (siehe nächster Abschnitt). Es geht hier weniger darum, dass die Schüler einen Lösungsweg einschlagen, den wir selbst als Lehrpersonen sehen, sondern einen Lösungsweg selbstständig entwickeln. Hat die ganze Klasse Probleme einen Lösungsweg zu finden, so bietet es sich an, eine kurze Plenumsphase einzuschieben, in der man die Schüler bittet, ihre Probleme zu formulieren und zu diskutieren. Auch hier gilt wieder: Äußerste Zurückhaltung mit Kommentaren!

In der ***Auswertungsphase*** stellen die Schüler einerseits ihre Ergebnisse und ihren Lösungsweg vor, andererseits wird hier über die Lösungen und ihre Qualität reflektiert. Diese Reflexion über die Lösung ist einerseits Teil des Modellierungsprozesses und andererseits Teil der „Erziehung“ der Schüler zum selbstständigen Arbeiten, ist man doch später im Beruf auch immer wieder gefordert, seine eigene Leistung vor Abgabe (an den Chef, einen Kunden etc.) kritisch zu hinterfragen. Ziel des Unterrichts muss es sein, die Schüler darin zu unterstützen, die Validierung selbstständig vorzunehmen. Da Schüler es in der Regel aus dem Mathematikunterricht nicht gewöhnt sind, ihre Ergebnisse kritisch zu hinterfragen, wird diese Validierung der Ergebnisse zunächst gemeinsam stattfinden müssen. Als Lehrkraft ist man also zu Beginn gefordert, solche Fragen und Impulse zu formulieren, welche die Schüler zum Reflektieren auffordern. Wichtig ist dabei auch, dies nicht nur bei solchen Schülerlösungen vorzunehmen, die fehlerhaft sind. Sonst merken die Schüler gleich, dass alle Ideen die diskutiert werden Fehler enthalten und müssen diese Erkenntnis nicht mehr selbst gewinnen. Im Rahmen der Erziehung zur Selbstständigkeit müssen diese Aufforderungen zur Reflexion bei allen Schülerlösungen kommen.

Minimale Hilfen

Phasen, in denen die Schüler unter sich arbeiten, sind die Voraussetzung dafür, dass die Schüler selbstständig arbeiten: Gruppenarbeit aber auch Partner- und partiell auch Einzelarbeitsphasen bieten sich also an. Doch diese Sozialformen allein gewährleisten nicht, dass die Schüler selbstständig arbeiten. Denn: Die Schüler sind das selbstständige Arbeiten nicht gewöhnt und fordern natürlich Hilfen ein. Viel zu leicht sind wir da im Eifer des

Gefechtes geneigt, genaue Hinweise zu geben, wie die Schüler weiter zu rechnen haben, welche Formel sie benutzen sollen usw. und finden uns schließlich dabei wieder, von Tisch zu Tisch zu rennen. Doch das ist in erster Linie Stress für die Lehrperson und die Schüler lernen dadurch nicht, selbstständig zu arbeiten. Der zunächst schwierig anmutende Weg hilft den Schülern selbstständiger zu werden und schafft auch Erleichterung für die Lehrperson: Es werden nur solche Hilfen gegeben, die den Schülern helfen, die Lösung selbst zu finden.

Welche Formen solcher Hilfen gibt es?

Grundsätzlich gilt beim Modellieren das Prinzip der minimalen Hilfen. Die Lehrperson muss sich soweit wie möglich zurückhalten und nur dann helfen, wenn es unbedingt nötig ist; und auch dann nur so wenig wie möglich. Die Schüler sollen schließlich lernen selbstständig zu arbeiten! Es ist sehr effektiv, nur Fragen zu stellen, welche die Probleme an die Schüler zurückgeben.

- Könnt ihr mir erklären, womit ihr euch gerade beschäftigt?
- Worin besteht das Problem?
- Was habt ihr bislang versucht, um das Problem zu lösen?
- Habt ihr weitere Ideen, wie ihr das Problem lösen könntet?

Dabei muss man natürlich nicht nur die Fragen stellen, sondern auch darauf achten, dass die Schüler sich bemühen, über die Fragen nachzudenken und entsprechend darauf zu antworten. Alleine das Formulieren des Problems und der bisher versuchten Lösungswege führt häufig dazu, dass die Kinder ihre Gedankengänge strukturieren und dann alleine Wege und Möglichkeiten finden, fortzufahren. Hilft dies nicht, so kann man auch weiterführende Hilfen geben, doch nur so viel, wie unbedingt nötig.

Einerseits gibt es Hilfen, die die Schüler *motivieren* sollen bzw. ihnen aufmunternde *Rückmeldung* geben, also z. B. „Du wirst das schon schaffen.“, „Versuch es doch mal.“, „Du bist auf dem richtigen Weg.“ oder „Da musst du noch mal nachrechnen.“. Darüber hinaus gibt es Hilfestellungen, die den Schülern gewisse *Strategien* im Umgang mit Modellierungsaufgaben vermitteln sollen. Dazu gehören Hinweise wie „Lies dir die Aufgabe genau durch.“, „Mache dir eine Skizze.“, „Schreibe dir die gegebenen Daten heraus.“ oder „Welche Daten benötigst du, wie kannst du sie erhalten?“. Darüber hinaus bietet Wissen über den Modellierungsprozess für die Schüler eine zusätzliche Hilfe beim Modellieren: „Überlege dir, an welcher Stelle des Modellierungsprozesses du jetzt weiter machen musst.“ (siehe Abschnitt Metakognition). Eine Interviewstudie hat gezeigt, dass selbst schwache Schüler bereit sind, sich über einen langen Zeitraum mit Modellierungsaufgaben zu beschäftigen, wenn sie nur diese Art von Rückmeldungen bekommen. Natürlich wird es nicht allen Schüler sofort gelingen, auf diese Art und Weise die Lösung zu finden, die man selbst als Lehrer gerade im Kopf hat oder die man als geeignet empfindet, aber darum geht es doch auch gar nicht. Viel wichtiger ist es doch, die Schüler zur Selbstständigkeit im Anwenden von Mathematik zu erziehen, einer Selbstständigkeit, die ihnen auch später im Leben noch erlaubt, Mathematik im Leben anzuwenden, wenn sie den Lehrer nicht mehr fragen können.

Inhaltliche Hilfen hingegen verhindern, dass die Schüler selbstständig an der Aufgabe arbeiten. Dazu gehören zum Beispiel Hilfen wie „Stelle einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Werten her.“, „Wie viele Personen sitzen denn in einem Auto?“, „Bedenke, dass zwischen zwei PKW immer noch Platz sein muss.“. Auch hier folgen die Schüler im Grunde nur den Anweisungen der Lehrperson, auch wenn sie in Gruppen arbeiten.

Gesprächsführung

Selbstständiges Arbeiten der Schüler bedeutet auch, dass die Schüler sich im Plenum zuhören, sich aufeinander beziehen und aufeinander eingehen. Das kann nur gelingen, wenn der Lehrer sich deutlich zurückhält. Nur wenn der Lehrer nicht jede Äußerung kommentiert, lernen die Schüler sich aufeinander zu beziehen. Ganz konkret heißt das für die Gesprächsführung

- mehrere Schüleräußerungen hintereinander hören, ohne sie zu kommentieren;
- die Schüler auffordern, laut zu sprechen;
- die Schüler auffordern, einander zuzuhören;

- die Schüler auffordern, die Aussagen von anderen Schülern zu wiederholen (denn dadurch werden sie gezwungen, einander zuzuhören);
- die Schüler auffordern, sich aufeinander zu beziehen;
- zwischendurch die Schüleräußerungen zusammenfassen, gegenüberstellen oder offene Fragen nennen.

Die Anzahl der Schülerbeiträge sollte deutlich größer sein als die Anzahl der Lehrerbeiträge. Eine Hilfe auf dem Weg dahin kann zum Beispiel sein, einzelne Schüler als Co-Moderatoren einzusetzen.

Metakognition

Metakognition bezeichnet das Denken über das eigene Denken und die Steuerung des eigenen Denkens. Eine ähnliche Bedeutung hat der im Rahmen von PISA geprägte Begriff des *selbstregulierten Lernens*. Darunter wird die Handlungskompetenz der Lernenden verstanden, sich selbstständig Lernziele zu setzen, dem Inhalt und dem Ziel angemessene Lernstrategien auszuwählen, einzusetzen, und diese gegebenenfalls zu korrigieren sowie das eigene Vorgehen zu überwachen und zu bewerten.

Welche Bedeutung haben diese Begriffe für den Mathematikunterricht? Ist es nicht selbstverständlich, dass man über sein Denken nachdenkt und sich selbst angemessene Ziele setzt? Für uns ist es das vielleicht und diese Prozesse laufen bei kompetenten Lernern auch weitgehend automatisch ab. Für die Schüler jedoch, die es in der Regel gewöhnt sind, dass sie von der Lehrperson genau gesagt bekommen, was sie zu tun haben und ob das Ergebnis richtig ist, mit Sicherheit nicht. Auch das selbstregulierte Lernen müssen die Schüler lernen.

Ist das nicht zu schwer für Hauptschüler? Ganz im Gegenteil: Reflexionen über das Vorgehen beim Lösen von Modellierungsaufgaben helfen den Schülern beim Lösen solcher Aufgaben. Natürlich kann man auch hier keine Wunder erwarten (Wo kann man das schon?), doch im Laufe der Zeit fördern derartige Reflexionen auf der Metaebene die Modellierungskompetenzen der Schüler.

Daher sollten von Anfang an Lösungsstrategien für Modellierungsaufgaben auf einer Metaebene diskutiert werden, also: „Wie kann man vorgehen, um solche Aufgaben zu lösen?“ Im Laufe der Zeit sollte den Schülern folgendes klar werden:

- Zunächst versuche ich, das Problem zu verstehen. Dazu muss ich eventuell zusätzliche Informationen einholen.
- Anschließend vereinfache ich das Problem, damit ich es mit mathematischen Methoden lösen kann. Dabei ist es wichtig, darauf zu achten, dass ein sinnvoller Bezug zur Realität erhalten bleibt.
- Nun benutze ich die Mathematik.
- Wenn ich eine (mathematische) Lösung gefunden habe, muss ich überlegen, was sie in der Realität bedeutet. Ich prüfe, ob sie sinnvoll ist. Wenn ich keine Lösung finden kann, muss ich möglicherweise andere Vereinfachungen vornehmen.

Haben die Schüler dies verstanden, ist es sinnvoll, eine schematische Darstellung einzuführen, etwa wie in Abbildung 2 dargestellt.

Dieses Schema stellt für die Schüler einen Orientierungsrahmen dar, der ihnen Hilfestellungen geben kann, wenn sie nicht mehr weiter wissen. Für uns als Lehrer bietet es gleichzeitig die Möglichkeit, strategische Hilfen zu geben.

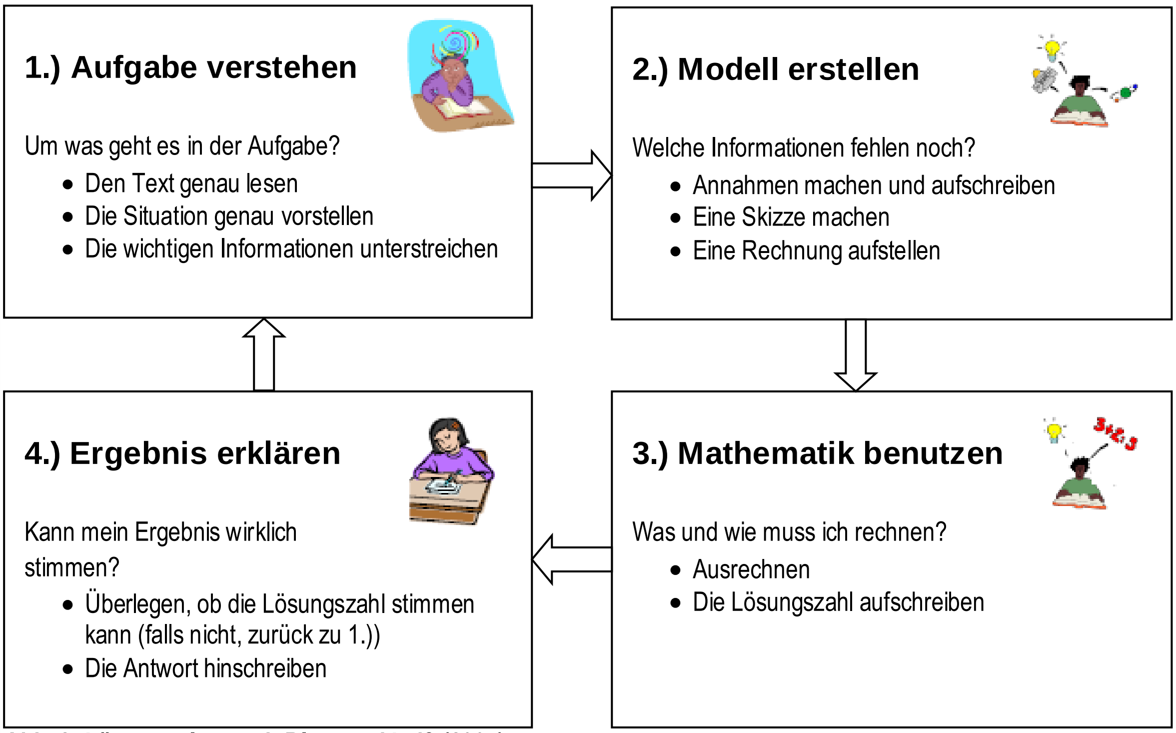

Abb. 2: Lösungsplan nach Blum und Leiß (2005)

Konstruktiver Umgang mit Fehlern

Natürlich sind trotz der Tatsache, dass Schüler aller Altersgruppen Modellieren lernen können, nicht alle Lösungen fehlerfrei. Fehler können bei allen Teilschritten des Modellierungsprozesses sowie auch übergreifend auftreten.

Wer sich selbstständig mit Problemen auseinandersetzt, wer versucht, zu schwierigen Fragen Lösungen zu finden, macht notwendigerweise Fehler. Fehler sind ein natürlicher, unverzichtbarer Schritt auf dem Weg zu einer Lösung, sie können Impulse zur Weiterentwicklung geben. Dies sollte auch den Schülern deutlich werden. Dazu trägt ein positives Unterrichtsklima bei, in dem Folgendes beachtet wird:

- Unangemessene Schülerlösungen und Lösungswege sollten nicht als „falsch" disqualifiziert werden, sondern genau wie die geeigneten Lösungsansätze im Plenum diskutiert werden (Genauso wichtig ist es, nicht nur bei Fehlern die anderen zu fragen: Was meint ihr dazu? Wenn nur bei ungeeigneten Lösungsansätzen nachgefragt wird, wissen die Schüler auch gleich, dass diese falsch sind. Das gilt es zu vermeiden.).
- Jede Idee, jede Frage ist ein Beitrag auf dem Weg zur Lösung und somit besser, als gar kein Beitrag – dies sollte den Lernenden durchaus offensiv verdeutlicht werden.
- Schüler, die über einen Irrweg zur Lösung gefunden haben, sollten bei der Präsentation den gesamten Lösungsprozess darstellen.
- Grundsätzlich sollte sich die Lehrperson mit der Korrektur von Fehlern zurückhalten. Es ist ein großartiger Schritt auf dem Weg zur Selbstständigkeit der Schüler, wenn die Schüler die Fehler selbst entdecken. Dazu brauchen sie natürlich Zeit. Also gilt für die Lehrkraft: „Ruhe bewahren" und Fehler zunächst stehen lassen (sowohl während der Erarbeitungsphase als auch bei der Präsentation von Lösungen). Vielleicht werden die Fehler von den Schülern und ihren Mitschülern selbst entdeckt. Sollte dies nicht geschehen, so können im Anschluss an die Reflexion durch die Schüler entsprechende Impulse formuliert werden. Fordert man die Schüler während der Präsentation von Ergebnissen auf, genau aufzupassen, ob sie das Vorgehen verstehen, ob sie es auch so machen würden und Fragen und Anmerkungen mitzuschreiben, so hat das einen positiven Nebeneffekt: Die Schüler haben während der Präsentation von Lösungen eine gezielte Aufgabe und müssen zuhören.

Fördern und Bewerten

Genau wie bei der Bearbeitung von anderen Mathematikaufgaben können auch bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben Fehler auftreten. Anders ist nur, dass die Fehler hier an unterschiedlichen Stellen auftreten können. Hier geht es nicht nur darum, dass ein Schüler z. B. 132 · 17 nicht berechnen kann. Möglicherweise versteht er die in der Aufgabe dargestellte Situation schon nicht richtig, oder er hat Probleme damit, die relevanten Größen zu identifizieren. Es gelingt ihm nicht, ein geeignetes geistiges Modell der in der Aufgabe dargestellten Situation aufzustellen oder er vergisst am Schluss, darüber nachzudenken, ob die Lösung wohl geeignet ist. Das alles macht Modellieren nicht unbedingt schwerer, nur anders (vgl. Maaß, 2007).
Im Abschnitt „Was ist Modellieren?" wurde am Beispiel der Stauaufgabe deutlich gemacht, welche Schritte durchlaufen werden müssen. Natürlich können in all diesen Schritten auch Fehler passieren, auf die man reagieren muss, wenn die Schüler sie nicht selbst entdecken. Beispielsweise könnte ein Schüler bei der Bearbeitung der Stauaufgabe eine Länge von 2 m pro PKW annehmen und außerdem übersehen, dass zwischen zwei PKW immer noch ein Abstand von ca. 1 - 2 m ist. Das Realmodell ist hier also eher ungeeignet. Die Rückmeldung könnte so aussehen: „Wir sollten noch einmal über die Annahmen nachdenken. Sind alle Annahmen sinnvoll?" Oder auch, wenn dies nicht hilft: „Versucht Informationen über die Länge von PKW einzuholen. Stellt euch die Situation auf der Autobahn vor, benutzt Spielzeugautos als Modell." Diese Rückmeldungen sollte an allerdings nicht gleich während der Gruppenarbeitsphase gegeben werden. Die Schüler müssen ja die Gelegenheit haben, ihre Fehler selbst zu entdecken (siehe Abschnitt „Minimale Hilfen").
Entsprechend können natürlich auch Fehler an anderen Stellen entstehen: Der Schüler ist nicht in der Lage sein Ergebnis (z. B. 15.000) zu interpretieren, er erkennt die Bedeutung dieser Zahl nicht. Häufig vergessen Schüler auch kritisch auf ihre Berechnung zurückzuschauen. Fehler können also an vielen verschiedenen Stellen des Modellierungsprozesses auftreten und nicht nur wie häufig üblich beim Rechnen.
Wer diese Fehler zu gegebener Zeit (etwa bei der Rückgabe einer schriftlichen Hausarbeit oder nach der Präsentation der Gruppenergebnisse) nicht anmerkt und sich bei der Besprechung auf die Rechnung konzentriert, würde die Schüler darin in negativer Weise darin unterstützen, diese über das Rechnen hinausgehenden Schritte nicht ernst zu nehmen.

Methodenkompetenz für Schüler

Ziel des Mathematikunterrichts ist es nicht nur, den Schülern mathematisches Wissen zu vermitteln. Um sie zu befähigen, sich später selbst Wissen anzueignen, in Zusammenarbeit mit Anderen mathematische Probleme zu lösen und diese Lösungen zu präsentieren, müssen sie auch über die nötigen Methoden verfügen. Im Hinblick auf das Modellieren erscheinen Kompetenzen in den folgenden Bereichen als besonders relevant, die auch in den entwickelten Unterrichtseinheiten Berücksichtigung finden:

- Beschaffung von Informationen
- Lesen und Verstehen von Texten
- Selbstgesteuertes Lernen
- Arbeiten in Gruppen
- Beherrschung „weicher" mathematischer Fähigkeiten: Schätzen, Überschlagen, Skizzen anfertigen
- Dokumentation der Arbeits- und Denkschritte
- Präsentation von Ergebnissen
- Miteinander reden und diskutieren

Wie können diese Kompetenzen gefördert werden?

- *Informationen zu bestimmten Sachkontexten* können die Schüler dem Internet sowie Büchern entnehmen. Ebenso bietet es sich an, Experten zu einem Thema zu befragen (z. B. für das Unterrichtsmodul 3.1 einen Maler aus einem Malerfachbetrieb). Um die entsprechenden Suchkompetenzen der Schüler zu fördern, bietet es sich an, mit einem Kollegen aus dem Fach Deutsch zusammen zu arbeiten.

Das Projekt wurde vom Forschungsverbund Hauptschule gefördert.

- Das *Textverständnis* kann durch die folgenden Methoden gezielt trainiert werden (vgl. auch Klippert, 2006):
  - Schlüsselbegriffe markieren
  - Fragen zum Text beantworten
  - Fragen zum Text entwickeln
  - Den Text in eigenen Worten wiedergeben
- Im Sinne des *selbstgesteuerten Lernens* (vgl. Abschnitt *Metakognition*) ist es wichtig, dass sich der Schüler bewusst eigene Ziele setzt. Motivieren Sie Ihre Schüler also zur folgenden Tätigkeit:
  - Der Schüler überlegt (und notiert) sich, welche (Teil-)Schritte er beim Modellieren erreichen möchte (gemäß des Wissens, das er über das Modellieren hat, so genanntes Metawissen). Darauf aufbauend entscheidet er sich, welche Techniken er auf dem Lösungsweg anwendet. Bei der Reflexion oder Präsentation überprüft er, was er wie und warum geschafft hat.
- Besonders schwierig ist für die Schüler immer wieder, in *Gruppen zusammen zu arbeiten*. Wie kann man als Lehrer diese Kompetenzen fördern? Besonders wichtig erscheinen die folgenden Aspekte:
  - Was die Aufgabe angeht, so sind zunächst „echte“ Gruppenaufgaben von solchen Aufgaben zu unterscheiden, die im Prinzip auch alleine gelöst werden können. „Echte“ Gruppenaufgaben sind jedoch solche Aufgaben, die prinzipiell erst durch ein Zusammenwirken unterschiedlicher Personen lösbar werden. Modellierungsaufgaben sind solche Aufgaben, da sie die Diskussionen von Annahmen und Lösungsstrategien erfordern.
  - Zusätzlich kann es eine Hilfe sein, den Schülern verschiedene Funktionen zuzuteilen, die sich auf den organisatorischen Rahmen der Gruppenarbeit beziehen, z.B. Zeitwächter, „Schreiberling“, Materialbeschaffer.
  - Grundsätzlich sollte man sich als Lehrer bei der Gruppenarbeit zurückhalten! Falls die Gruppe Fragen an die Lehrperson stellt, gibt man diese an die Gruppe zurück und empfiehlt ihnen, das zu diskutieren und eine Entscheidung zu treffen. Falls eine Intervention der Lehrkraft unumgänglich ist, sollte man sich zuerst durch die Gruppe informieren lassen, an welchem Punkt der Aufgabenbearbeitung die Gruppe gerade ist (vgl. Abschnitt *Minimale Hilfen*).
  - Sollte eine Gruppe nicht in der Lage sein, Fragen selbst zu klären, tritt man während der Gruppenarbeit nicht in Zwiegespräche mit einzelnen Schülern, sondern spricht immer die Gruppe als Ganzes an.
  - Man sollte mit den Gruppen besprechen, wie mit Meinungsverschiedenheiten zur Sache innerhalb der Gruppe umgegangen wird. Eine Möglichkeit wäre, zu verabreden, dass sich bei unterschiedlichen Lösungsideen oder Ergebnissen jedes Gruppenmitglied zunächst einmal Argumente überlegt – etwa in einer kurzen Einzelarbeitsphase – die für seine Idee sprechen. Anschließend werden die Argumente in der Gruppe diskutiert.
  - Eine Möglichkeit, die Motivation für alle Gruppenmitglieder bei der Bearbeitung aufrecht zu erhalten, ist beispielsweise: Man klärt die Schüler darüber auf, dass man erst nach der Gruppenarbeit sagt, wer die Lösungen präsentieren soll. Dann sind alle gefordert mitzuarbeiten und keiner wird wirklich mit „Nebentätigkeiten“ beschäftigt sein.
- *Beherrschen „weicher“ mathematischer Fähigkeiten:* Für das Modellieren ist es sehr wichtig, dass die Schüler die Unterschiede zwischen *Modellieren* auf der einen Seite und *Schätzen, Überschlagen* und *Raten* auf der anderen Seite kennen. Dies kann man gut verdeutlichen, in dem man die Schüler zunächst die Lösung raten lässt und nach erfolgter Berechnung auf die geratenen Ergebnisse zurückblickt. Während die geratenen Ergebnisse meist sehr stark divergieren, zeigen die berechneten Ergebnisse trotz aller Unterschiede eine größere Übereinstimmung und sind begründet. Diese Idee wird auch in einigen der hier beschriebenen Unterrichtseinheiten verfolgt. Außerdem ist es gelegentlich von Vorteil, Skizzen im weiteren Sinne (also z. B. auch eine vereinfachte bildliche Darstellung der oben beschriebenen Stau-Aufgabe)

Das Projekt wurde vom Forschungsverbund Hauptschule gefördert.

anfertigen zu lassen. Sind die Schüler darin nicht geübt, so sollte man das geeignete Anfertigen von Skizzen im Unterricht explizit thematisieren.

- Die *Dokumentation im Heft* dient in erster Linie dazu, den Weg, den der Schüler zur Lösung gegangen ist, festzuhalten. Sie ist also ein Teil des Prozesses und kein Endprodukt. Daher sind folgende Aspekte wichtig:
    - Die Dokumentation enthält in erster Linie den Lösungsweg und erst an zweiter Stelle die Lösung.
    - Es kommt weniger auf die Form, sondern mehr auf den Inhalt an.
    - Auch Ansätze, die später vielleicht nicht weiterverfolgt werden, dürfen dokumentiert werden.
    - Fehlermachen gehört dazu, daher sollen Fehler oder falsche Wege nicht auf dem Papier gelöscht („gekillert") oder wegradiert werden.

  Oft fällt es den Schülern sehr schwer, ihre Gedankengänge explizit zu formulieren und/ oder aufzuschreiben. Um dies zu lernen, bietet sich ein Training mit einfachen Matheaufgaben an, bei dem die Schüler ausführlich beschreiben und aufschreiben, welche Teilschritte sie warum gemacht haben. Dies ist mündlich zunächst einmal leichter als schriftlich. Hier bietet sich wieder eine Zusammenarbeit mit dem Fach Deutsch an.

- Auch das *Präsentieren von Lösungen und Lösungswegen* muss geübt werden. Die Schüler sollten dabei besonders darauf aufmerksam gemacht werden, wie ein Poster oder eine Folie übersichtlich gestaltet werden muss (z.B. Überschrift, Gliederung, Schriftgröße usw.). Um die Schüler darin zu trainieren, bietet es sich an, anhand von vorhandenen Plakaten zu überlegen, wie man sie optimieren könnte. Dies muss natürlich in einer offenen, angstfreien Atmosphäre und in kleinen Schritten geschehen, um die Schüler nicht zu frustrieren.

  Außerdem sollten die Schüler auch vorab überlegen, was man in der Vorstellung erwähnen muss, und wer welche Teile vorträgt.

- *Miteinander reden und diskutieren*: Lassen Sie Ihre Schüler in kurzen und inhaltlich einfachen Gesprächssituationen folgende Aspekte trainieren (angelehnt an den Bildungsplan, Kompetenzen und Inhalte, Deutsch, Klasse 6):
    - Verständlich sprechen
    - Aufmerksam zuhören und aufeinander eingehen
    - Eine Meinung zu einem Thema äußern, zu anderen Meinungen Stellung nehmen
    - An Diskussionen der Klasse mitwirken

Motivation

Viele Schüler haben negative Vorerfahrungen (z.B. Misserfolgserlebnisse) und Versagensängste in Mathematik, was sich natürlich in einer mangelnden Motivation in diesem Fach niederschlägt. Gerade bei relativ schwachen Schülern kann es daher zu einem „Teufelskreis" kommen, wenn Misserfolgserleben zu mangelnder Motivation und Vermeidungsverhalten, dies dann wiederum zu schlechten Leistungen führt. Daher ist es wichtig, dass die Schüler erfahren, dass Mathematik nicht zwangsläufig mit unangenehmen Gefühlen und Ängsten verbunden sein muss.

Grundbedürfnisse der Schüler

Um bei den Schülern positive Erlebnisse in Lernsituationen zu fördern, hat sich in vielen Studien herausgestellt, dass auf folgende Grundbedürfnisse der Schüler eingegangen werden sollte

- Bedürfnis nach Autonomie und Selbstbestimmung
- Bedürfnis nach Kompetenzerleben
- Bedürfnis nach sozialer Eingebundenheit

Um diese Bedürfnisse zu befriedigen, bieten sich beispielsweise folgende Maßnahmen an (sicherlich fallen Ihnen noch viel mehr und auch bessere Möglichkeiten ein!):

- Förderung der Autonomie: Wahlfreiheiten bezüglich der Aufgaben, der Aufgabenschwierigkeiten oder der Lösungsmöglichkeiten zu erleben. Konkret bei Modellierungsaufgaben können die Schüler selbständig ihren Lösungsweg wählen. Jeder Schüler wählt einen Lösungsweg auf seinem Niveau, dies trägt zur Binnendifferenzierung und damit zum Kompetenzerleben der Schüler bei.
- Förderung der eigenen Kompetenzwahrnehmung: Dokumentieren des eigenen Könnens, der eigenen Lernfortschritte, Fokussierung auf die eigenen Stärken
- Förderung der sozialen Eingebundenheit: z.B. durch Gruppen- oder Partnerarbeit.

Berücksichtigung des individuellen Leistungsverlaufs

Für die Schülermotivation ist es günstig, wenn die Lehrkraft die individuelle Leistungsentwicklung berücksichtigt (so genannte individuelle Bezugsnormorientierung). Das bedeutet, dass in Kommentaren zu Lernergebnissen, oder im Unterrichtsgespräch nicht der soziale Vergleich mit den Mitschülern, sondern der individuelle Vergleich mit den früheren Leistungen des Schülers im Vordergrund stehen sollte (z.B. in Kommentaren wie „Du hast dich wirklich verbessert, das ist prima.“). Problematisch ist dagegen der soziale Vergleich (z.B. „Im Vergleich zu deinen Mitschülern sind deine Leistungen...“)

Günstige Ursachenzuschreibungen fördern

Gerade Schüler mit negativen Vorerfahrungen und Misserfolgserlebnissen neigen dazu, einen eigenen Misserfolg auf die anscheinend mangelnde eigene Begabung in Mathematik zurückzuführen. Dies kann sich in Sätzen äußern wie „Ich bin einfach für Mathe nicht begabt und werde es daher nie können“. Tatsächlich gibt es aber viele mögliche Ursachen für einen Misserfolg. Wesentlich günstiger ist es, wenn Schüler nicht ihre Begabung als Ursache für Leistungen heranziehen, sondern beispielsweise ihre (zu geringe) Anstrengung oder mangelnde Strategien beim Lösen von Aufgaben. Der Unterschied zu einer Ursachenzuschreibung auf die eigene Begabung liegt darin, dass die Begabung nicht veränderbar und nicht selbst kontrollierbar ist, Anstrengung und Lösungsstrategien können dagegen verändert werden.

Der Lehrer kann ungünstige Ursachenattributionen hinterfragen, günstige Attributionen dagegen durch konkrete Fragen fördern (z.B. „Hast du dich auch genügend angestrengt? Lag es vielleicht daran, dass du nicht wusstest, wie du vorgehen solltest? Wie würdest du das nächste Mal vorgehen?“ usw.).

Hinweis

In diesem kurzen Leitfaden kann nur auf einige wichtige Aspekte des Modellierens eingegangen werden. Für weitergehende Erläuterungen sowie eine Vielzahl von Aufgaben wird auf das Buch „Mathematisches Modellieren im Unterricht – Aufgaben für die Sekundarstufe I“ (Maaß, Katja, 2007, erschienen im Cornelsen Verlag) verwiesen.

Das Projekt wurde vom Forschungsverbund Hauptschule gefördert.